Aufgabe Zufallsgröße

In einer Lostrommel mit 200 Losen gibt es eine Playstation zu gewinnen, 20 Spiele für Playstation und 50 Trostpreise.

Ermittle die Zufallsgrößen und die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Lösung:

Zufallsgröße x_i	Playstation	Spiel	Trostpreis	Kein Gewinn
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{200}$	$\frac{20}{200}$	$\frac{50}{200}$	$\frac{129}{200}$

Eine Münze wird zweimal geworfen. Wenn zweimal Kopf oben liegt, erhält Hans 5 Euro ansonsten muss er 1 Euro zahlen.

Ermittle die Zufallsgrößen und die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Lösung:

Zufallsgröße x_i	5	-1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Wie lautet die Formel für den Erwartungswert μ?

$E(x) = \mu = x_i \cdot P(X = x_i)$

Ein Würfel wird einmal geworfen.

Ermittle die Zufallsgrößen und die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Berechne den Erwartungswert.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$

Laut Murphys Gesetz, fällt ein Butterbrot immer auf die beschmierte Seite. Nehmen wir einmal an, dass dies in 80% ($=\frac{4}{5}$) der Fälle wirklich zutrifft. Wir werfen das Brot 3mal.

Ermittle die Zufallsgrößen und die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Berechne den Erwartungswert.

Probiert es im heimatlichen Wohnzimmer aus.

Lösung:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$	$3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)$ $3\cdot\frac{1\cdot 4}{125}=\frac{12}{125}$	$3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2$ $3\cdot\frac{1\cdot 16}{125}=\frac{48}{125}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$

$E(X) = 0\cdot\frac{1}{125}+1\cdot\frac{12}{125}+2\cdot\frac{48}{125}+3\cdot\frac{64}{125}=2{,}4$

Es ist also zu erwarten dass 2,4 Brote bzw. 2 auf die Butterseite fallen.

Zwei Freunde spielen folgendes Spiel: Zwei Würfel werden geworfen. Erscheint beim Würfeln kein Einser, so muss Max einen Euro zahlen. Für *jeden* „Einser“, muss Hans einen Euro bzw. für zwei Einser 2 Euro bezahlen.

a) Ermittle die Zufallsgrößen und die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Max. Wie würde die Verteilung für Hans aussehen?
b) Berechne den Erwartungswert, bzw. Mit welchem Gewinn kann Max rechnen?
c) Wie viel sollte Max statt einem Euro bezahlen, damit das Spiel fair ist?

Lösung

a)

Zwei Einser: 2 Euro $\quad P(X = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$

Ein Einser: 1 Euro $\quad P(X = 1) = 2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{36}$

Kein Einser: - 1 Euro $\quad P(X = -1) = \left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$

x_i	-1	1	2
$P(X= x_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

b)

E(X) = $-1\cdot\frac{25}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+2\cdot\frac{1}{36}\approx-0{,}38$ Euro. Im Schnitt verliert Max also 0,38 Euro. Hans gewinnt hingegen langfristig 0,38 Euro.

c) E(X) = $-x\cdot\frac{25}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+2\cdot\frac{1}{36}=0$ Mit nsolce im GTR x = 0,48 Euro

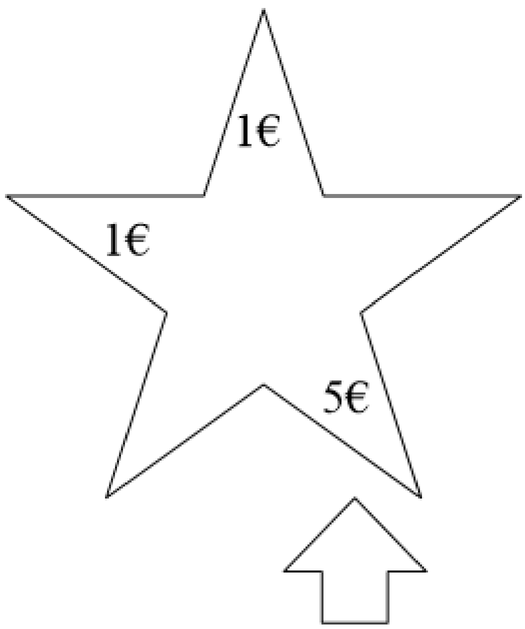
Max müsste 0,48 Euro bezahlen.

1. In der Abbildung (rechts) ist eine Art Glücksrad abgebildet. Wenn der Pfeil auf ein Feld mit einem Geldbetrag zeigt, wird der Betrag ausgezahlt.

Berechne den Einsatz pro Spiel,

der nötig ist, damit es sich um ein faires Spiel

handelt!



x_i	-x	1	5
$P(X= x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

$E(x) = -x\cdot\frac{2}{5}+(1-x)\cdot\frac{2}{5}+(5-x)\cdot\frac{1}{5}=0$

=> x = 1,4. Der Einsatz müsste 1,40 Euro betragen.

Nenne die Formeln für die Varianz und die Standardabweichung σ

Mit V(X) bezeichnen wir die **Varianz**:

$V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$

Die Wurzel aus der Varianz V(X) heißt **Standardabweichung** der Zufallsgröße X:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Was drücken die Varianz und die Standardabweichung aus?

Lösung: Beides ist ein Maß wie sehr Ergebnisse um den Erwartungswert streuen.

X sei die Augenzahl beim Werfen eines Würfels. Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die Standartabweichung.

Lösung:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$(x_i - \mu)^2$	6,25	2,25	0,25	0,25	2,25	6,25

E(x) = 3,5 $V(x) = \frac{17{,}5}{6} = 2{,}92$ $\sigma(x) = 1{,}71$

X sei die Summe der Augenzahlen beim Werfen zweier Würfel. Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$(x_i - \mu)^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

E(x) = 7   V(x) = $\frac{210}{36} = 5{,}83$ $\sigma(x) = 2{,}42$

Weitere Aufgaben ohne Lösung:

3. In einer Urne befinden sich 2 gelbe und 3 blaue Kugeln.

Es werden 3 Kugeln ohne zurücklegen gezogen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die letzte Kugel blau bzw. gelb ist!

b) Berechne den Erwartungswert für die Zufallsgröße X: „Anzahl der blauen Kugeln“!

c) Wie ändert sich der Erwartungswert von b) wenn man die Kugeln zurücklegt?

d) Bei einem Spiel zahlt man einen Einsatz von 2€. Wenn man eine gelbe Kugel zieht, erhält man einen Gewinn von 1€. Wenn man beide gelben Kugeln zieht, gibt es 4€ Gewinn. Bestimme, ob

es sich um ein faires Spiel handelt!

4.Bei einem Spiel wird ein Würfel zwei Mal hintereinander geworfen. Der Spieler gewinnt 2 €, wenn er zwei gleiche Zahlen geworfen hat.

a) Berechne den zu erwartenden Gewinn!

b) Berechne, wie groß der auszuzahlende Betrag im Gewinnfall sein müsste, damit bei einem Einsatz von 1€ das Spiel fair ist!

5. Bei einem Spiel, Einsatz 1€, werden 3 Würfel gleichzeitig geworfen. Wenn alle Würfel eine Sechs anzeigen, wird ein Gewinn von 100€ ausgezahlt. Berechne den durchschnittlichen Gewinn/Verlust des Spielbetreibers!